

РАЗДЕЛ № 4. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Тема № 5. Решение задач целочисленного программирования.

Практическое занятие 5.1

Тема практического занятия «Методы решения задач целочисленного программирования».

Учебные вопросы:

1. Общая характеристика методов решения задач целочисленного программирования.
2. Понятия целевой функции, показателя эффективности, критерия принятия рационального решения.

Основные операции над множествами

Множества X и Y *равны* ($X = Y$), если они состоят из одних и тех же элементов.

Объединением или *суммой множеств* X и Y ($X \cup Y$) называется множество X всех элементов, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств X или Y . При этом элементы, принадлежащие как множеству X , так и множеству Y входят в объединение $Z = X \cup Y$ только один раз.

Пример 1. Пусть $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $Y = \{2, 4, 5\}$. Тогда $Z = X \cup Y = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

Пересечением множеств X и Y ($X \cap Y$) называется множество, состоящее из всех элементов, одновременно принадлежащих как множеству A , так множеству Y .

Множества X и Y называются *непересекающимися*, если $X \cap Y = \emptyset$.

Пример 2. Пусть $X = \{4, 8, 10, 6\}$, $Y = \{2, 8, 10\}$. Тогда $Z = X \cap Y = \{8, 10\}$.

Операции объединения и пересечения множеств могут быть распространены случай совокупности множеств $\{X_i, i = \overline{1, n}\}$. Тогда объединение $\bigcup_{i=1}^n X_i$ состоит из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X_i , а пересечение $\bigcap_{i=1}^n X_i$ – из всех элементов, одновременно принадлежащих каждому из множеств X_i .

Разностью множеств X и Y ($X \setminus Y$) называется множество всех элементов из X , не принадлежащих множеству Y .

Пример 3. Пусть $X = \{1, 2, 4, 6\}$, $Y = \{4, 2\}$. Тогда $Z = X/Y = \{1, 6\}$.

Задачи целочисленного программирования и основные методы их решения

Некоторые модели целочисленного программирования

Оптимизация — влечение времени. Сейчас важно создавать не просто фирмы, АО и т.д., а такие экономические системы, которые бы работали оптимально в определенном смысле. При этом под *системой* понимают некоторое объединение ее взаимосвязанных составных элементов (подсистем), которое следует рассматривать как единое целое.

В зависимости от конкретной задачи системой может считаться, например, губерния. Тогда районы - ее подсистемы. Системой может быть, например, сбербанк. Тогда отделения сбербанка - ее подсистемы.

В зависимости от назначения системы указывают *критерий качества* (целевую функцию, показатель эффективности) - функцию, максимум или минимум которой отыскивается.

В качестве *критерия оптимальности*, в зависимости от решаемых задач, могут выступать прибыль, доход, производительность труда, функция полезности и т.д. Следует заметить, что выбор критерия оптимальности часто является весьма сложной задачей, а неправильный его выбор может привести к неверным результатам.

Стремление улучшить критерий оптимальности практически всегда приводит к ухудшению некоторых показателей, характеризующих систему,

на которые накладываются определенные ограничения. Так, увеличение точности приводит к удорожанию системы, а часто и к снижению надежности, увеличению массы, объема.

Выраженные через переменные целевая функция и ограничения составляют *математическую модель задачи*.

Если модель построена, то можно ставить задачу: найти такие значения переменных, чтобы при выполнении ограничения целевая функция достигла наибольшего (наименьшего) значения.

Всякий набор значений переменных, удовлетворяющий ограничениям определяет *допустимое решение*, а тот из них, с которым достигается максимум (минимум), определяет *оптимальное решение*.

В формализованном виде задача оптимального распределения ресурсов общей постановке заключается в определении такого вектора $X^* \in X$, который обеспечивает

$$\min f(X) \quad (1)$$

при ограничениях

$$D_\gamma(X) \leq D_\gamma^0, \gamma = \overline{1, m} \quad (2)$$

Если цель состоит в достижении максимального значения функции, то задача заключается в определении вектора $X^* \in X$, который обеспечивает

$$\max f(X) \quad (3)$$

при условии (2), где D_γ^0 – допустимые значения функции $D_\gamma(X)$ (константы ограничения); $f(x)$ – целевая функция; $X = \{x_i, i = \overline{1, n}\}, x_j \geq 0 \forall j = \overline{1, n}$.

Область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения экстремальных задач с ограничениями, называется *математическим программированием*. В зависимости от вида целевой функции, ограничений и переменных различают линейное, нелинейное, дискретное, стохастическое программирование [5].

В настоящем пособии рассматриваются задачи целочисленного программирования. Целочисленное программирование изучает задачи вида (1),

(2), когда на все или часть переменных накладывается требование целочисленности.

Для широкого класса задач функции $f(x)$ и $D_\gamma(x)$ имеют вид:

$$f(x) = \sum_{j=1}^n c_j(x_j),$$

$$D_\gamma(x) = \sum_{j=1}^n d_{ji}(x_j),$$

где переменные $x_j = \overline{1, g_j}$, то есть принимают целочисленные значения от 1 до g_j . Переменную x_j часто называют реализацией j -й подсистемы.

Тогда задача (1), (2) заключается в следующем: найти такие реализации x_j ($x_j \in \{\overline{1, g_j}\}, j = \overline{1, n}$) подсистем, чтобы обеспечить

$$\min_{x_j} \sum_{j=1}^n c_j(x_j) \quad (4)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^n d_{ji}(x_j) \leq D_\gamma^0, \gamma = \overline{1, m}, x_j - \text{целые числа}, \quad (5)$$

или найти

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^n c_j(x_j) \quad (6)$$

при условии (5), где $c_j(x_j)$ – стоимость реализации x_j причем под стоимостью, в

зависимости от задачи, можно понимать доход, прибыль, затраты и т. д.;

$d_{ji}(x_j)$ – ресурсы, сырье, оборудование и т.п.;

D_γ^0 – ограничения на γ -й показатель всей системы.

Определение. Функция $C(x)$, определенная при целых значениях x , называется выпуклой, если

$$C(x+1) - C(x) \geq C(x) - C(x-1).$$

В случае если для некоторых значений x условие выпуклости не выполняется, используют аппроксимацию, сущность которой изложена в [9].

В целочисленном программировании особую роль играет следующая задача: найти

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^n c_j x_j \quad (7)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^n d_{ji} x_j \leq D_{\gamma}^0, \quad \gamma = \overline{1, m} \quad (8)$$

$$x_j \in \{0; 1\}, \quad j = \overline{1, n} \quad (9)$$

Задачу (7) - (9) называют задачей о ранце либо задачей целочисленной линейного программирования с булевыми переменными (по имени английского математика Д. Буля, основателя математической логики).

Особенность задачи (7) - (9) заключается в том, что переменная x_j принимает только два значения - 0 или 1. К модели (7) - (9) могут быть сведены различные задачи оптимального распределения ресурсов.

Рассмотрим, например, следующую задачу. Планируется строительство n предприятий различного профиля (молочные, консервные заводы, мясокombинаты, кондитерские фабрики и т. п.). Каждое предприятие занимает определенную площадь, после пуска его в эксплуатацию будет приносить определенный доход. Задана суммарная площадь застройки. Необходимо определить, какие предприятия следует строить, чтобы суммарный доход был максимальным, а суммарная площадь строительства не превышала заданное значение.

Обозначим:

$x_j = 1$, если j -е предприятие будет строиться;

$x_j = 0$, если j -е предприятие не будет строиться;

c_j - доход, который будет приносить j -е предприятие после строительства пуска в эксплуатацию, $j = \overline{1, n}$;

d - площадь, занимаемая j -м предприятием, $j = \overline{1, n}$

D^0 - суммарная допустимая площадь застройки.

Математическая модель заключается в следующем: найти

$$\max_{x_j} \sum_{j=1}^n c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^n d_{ji} x_j \leq D_i^0,$$

$$x_j \in \{0; 1\}, \quad j = \overline{1, n}$$

Таким образом, задача свелась к задаче о ранце.

Отметим, что задачи вида (7) – (9) не могут быть решены методом линейного программирования. Решение указанной задачи, например, симплексным методом, без учета условий целочисленности, с последующим округлением нецелочисленных значений до целых чисел, приводит к существенным погрешностям. Более того, в этом случае отсутствует способ проверки допустимого плана на оптимальность.

Поэтому для решения целочисленных задач разработаны специальные методы и алгоритмы, учитывающие существенные особенности задач.

Исторически первым методом решения целочисленных задач (не считая метода перебора) был метод отсечения, разработанный американским математиком Р. Гомори. Идея метода проста. Любая дискретная задача представляется в виде задачи линейного целочисленного программирования. Сняв условие иости, находят оптимальное решение двойственным симплекс-методом. Если полученное решение целочисленное, то оно является оптимальным. В противном случае вводится дополнительное ограничение, отсекающее оптимальную вершину, но сохраняющее все целочисленные решения внутри допустимой области. Вычислительная процедура повторяется до тех пор, пока оптимальное решение не окажется целочисленным. Существенный недостаток метода - плохая сходимость вычислительной процедуры. Поэтому

му в настоящее время он практически не используется. Основные усилия исследователей в 60-70-е годы были сосредоточены на развитии комбинаторных методов оптимизации, особенно методов ветвей и границ и динамического программирования. В 1960 году появилась работа американских исследователей Лэнда и Донга, где предлагался алгоритм решения целочисленной задачи линейного программирования, хотя и идейно близкий к алгоритмам отсечения, но положивший начало новому методу, получившему название «метод ветвей и границ» (МВГ). Это название было предложено в 1963 году в работе американских ученых Литтла, Мурти, Суини, Кэрл, где решалась знаменитая задача о коммивояжере. Методу посвящены сотни публикаций. В нашей стране вышли монографии А.А. Корбута, Ю.Ю. Финкельштейна (1969 г.), О.Г. Алексеева (1987 г.) и др.

Наиболее существенными особенностями метода являются:

построение дерева возможных вариантов;

определение оценки границы решения для каждой вершины дерева;

отсечение бесперспективных вершин.

Эффективность МВГ определяется точностью способа определения границы решения. Поэтому данному вопросу уделяется исключительное внимание.

Динамическое программирование идейно имеет глубокие корни, связанные с работами великого русского математика А. А. Маркова. Метод динамического программирования был разработан американским математиком Р. Беллманом в 1957 году и основан на принципе оптимальности. Большой вклад в развитие методов динамического программирования, ветвей и границ внес советский ученый О.Г. Алексеев.

Рассмотрим комбинаторные методы более подробно. Поскольку эти методы основаны на замене полного перебора перебором частичным, обратим внимание на метод полного перебора. Изложим также сущность приближенного градиентного метода, который имеет как самостоятельное значение, так и применяется в методе ветвей и границ для построения оценок.

Задание на самоподготовку.

Повторить материалы практического занятия и подготовиться к ответам на следующие вопросы:

- а) дать определение математической модели задачи;
- б) представить в формализованном виде задачу оптимального распределения ресурсов;
- в) особенности задач целочисленного программирования.

**Список литературы для углубленного изучения материалов
практического занятия**

1. Грешилов А.А. Математические методы принятия решений: учебное пособие. – М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2014. – 647 с. [стр. 13 – 35].
2. Математические методы и модели исследования операций: учебник / ред. В.А. Колемаев. - Москва: Юнити-Дана, 2015. - 592 с. [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=114719>. [стр. 174 – 177].
3. Шапкин, А.С. Математические методы и модели исследования операций: учебник / А.С. Шапкин, В.А. Шапкин. - 7-е изд. - Москва: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2017. - 398 с. [Электронный ресурс]. - URL: <http://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=452649>. [стр. 146 – 154].